5. Linearni sistem DJ sa konstantnim koeficijentima

Homogen linearan sistema DJ sa konstantnim koeficijentima:

$$Y'(t) = AY(t), \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \tag{1}$$

Ojlerov metod

⋆ Broj λ je **sopstvena vrednost** matrice A, ako postoji vektor $v \neq 0$, koji se naziva **sopstveni vektor** odgivarajući sopstvenoj vrednosti λ, tako da je

$$A\,v = \lambda\,v$$

⋆ Sopstvene vrednosti matrice A su koreni **karakerističnog polinoma matrice** A:

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

karakteristična jednačina sistema DJ

⋆ Sopstveni vektor $\widetilde{v} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)^T$, odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\widetilde{\lambda}$ određuje se odredjivanjem netrivijalnog rešenja linearnog homogenog sistema jednačina

$$(A - \widetilde{\lambda} I)v = 0$$

Teorema 1 *Vektorska funkcija $\varphi(t) = ve^{\lambda t}$ je rešenje vektorske DJ (1) ako i samo ako je λ sopstvena vrednost kvadratne matrice A i v odgovarajući sopstveni vektor.*

Dokaz. Za vektorsku funkciju $\varphi(t) = ve^{\lambda t}$ važi

$$\varphi'(t) - A\varphi(t) = \frac{d}{dt}\left(ve^{\lambda t}\right) - Ave^{\lambda t} = \lambda v\, e^{\lambda t} - Ave^{\lambda t} = (\lambda\, I - A)ve^{\lambda t}.$$

Dakle, ako je φ rešenje vektorske DJ (1) tj. $\varphi'(t) - A\varphi(t) = 0$ sledi da je $(\lambda\, I - A)v = 0$, odnosno $\lambda\, v = Av$. Obratno, ako je λ sopstvena vrednost matrice A tj. $(\lambda\, I - A)v = 0$, onda je $\varphi'(t) - A\varphi(t) = 0$. □

$\boxed{1}$ Sve sopstvene vrednosti matrice A su različite:

Teorema 2 *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ različite sopstvene vrednosti marice A i $v_1, v_2, \ldots, v_n$ odgovarajući sopstveni vektori. Tada su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno nezavisni vektori. Fundamentalni sistem rešenja sistema DJ(1) je*

$$S = \{v_1 e^{\lambda_1 t}, v_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, v_n e^{\lambda_n t}\},$$

a

$$\Phi(t) = \left[v_1 e^{\lambda_1 t} \;\; v_2 e^{\lambda_2 t} \;\; \cdots \;\; v_n e^{\lambda_n t} \right]$$

je FUNDAMENTALNA MATRICA SISTEMA (1).

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, da sopstveni vektori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nisu linearno nezavisni. Tada postoji maksimalni podskup $\tilde{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisnih vektora. Tada se svaki vektor skupa $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$ može predstaviti kao linearna kombinacija linearno nezavisnih vektora skupa $\tilde{S}$

$$(2) \qquad v_{k+1} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

$$\Downarrow \; \text{množenjem sa leva matricom } A$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = A v_{k+1} = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \cdots + c_k A v_k = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_k \lambda_k v_k$$

Tada je $\lambda_{k+1} \neq 0$. Zaista, pretpostavimo suprotno da je $\lambda_{k+1} = 0$. Tada, $\lambda_j \neq 0$ za svako $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i iz prethodne jednakosti bi imali da je

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_k \lambda_k v_k = 0\,.$$

Medjutim, kako je $(c_1 \lambda_1, c_2 \lambda_2, \ldots, c_k \lambda_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, to je suprotno pretpostavci da je $\tilde{S}$ skup linearno nezavisnih vektora. Dakle,

$$(3) \qquad v_{k+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} c_1 v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} c_2 v_2 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} c_k v_k$$

Iz (2) i (3) imamo

$$c_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} \right) v_1 + c_2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} \right) v_2 + \cdots + c_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) v_k = 0$$

odakle zbog linearne nezavisnosti vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ zaključujemo da je

$$c_j \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}} \right) = 0 \;\; \text{za svako } j = 1, 2, \ldots, k$$

i kako su $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$ za svako $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dolazimo do kontradikcije da je $(c_1, c_2, \ldots, c_k) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Kako je

$$W(t) = |v_1 e^{\lambda_1 t} \;\; v_2 e^{\lambda_2 t} \;\; \cdots \;\; v_n e^{\lambda_n t}| = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) t} |v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n| \neq 0$$

prema Teoremi 2.3. skup S je fundamentalni sistem rešenja sistema DJ(1) $\square$

OPŠTE REŠENJE SISTEMA DJ (1) JE:

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

Primer 5.1. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - y_2 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$$

Rešenje.

$$Y' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} Y$$

```
In[1]:=A={{5,-1},{0,3}};
Eigensystem[A]
Out[1]={{5,3},{{1,0},{1,2}}}
```

Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 3$, a odgovarajući sopstveni vektori su

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} \right\} \qquad \text{fundamentalni sistem rešenja}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix} \qquad \text{fundamentalna matrica rešenja}$$

Opšte rešenje:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ 2c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) = \Phi(t)\, c = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ 2c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y_2(t) &= 2c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Kompleksne sopstvene vrednosti matrice A:

Neka je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$ par konjugovano kompleksnih korena karakteristične jednačine odnosno sopstvenih vrednosti matrice A, a $v_k = a_k + ib_k$, $\overline{v_k} = a_k - ib_k$ odgovarajući sopstveni vektori. Kako je

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) = v_k e^{\lambda_k t} &= (a_k + ib_k) e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} = e^{\alpha_k t}(a_k + ib_k)(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t) \\ &= e^{\alpha_k t}(a_k \cos\beta_k t - b_k \sin\beta_k t) + ie^{\alpha_k t}(b_k \cos\beta_k t + a_k sin \beta_k t) \\ &= \psi_k(t) + i\psi_{k+1}(t) \end{aligned}$$

i $\varphi_k(t)$ rešenje sistema DJ (1), rešenja sistema DJ (1) su i vektorske funkcije $\psi_k(t) = \mathrm{Re}(\varphi_k(t))$ i $\psi_{k+1}(t) = \mathrm{Im}(\varphi_k(t))$.

Teorema 3 *Neka konstantna realna matrica A reda $n = 2k$ ima $2k$ prostih kompleksnih sopstvenih vrednosti $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j, j = 1, 2, \dots, k$ i neka su $v_j = a_j + ib_j, \overline{v_j} = a_j - ib_j, j = 1, 2, \dots, k$ odgovarajući sopstveni vektori. Tada vektori $\{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k\}$ formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$, odnosno to su $n = 2k$ linearno nezavisnih vektora. Neka su*

$$\begin{aligned}
\psi_j(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_j(t)) = \frac{\varphi_j(t) + \varphi_{k+j}(t)}{2}, \\
\psi_{k+j}(t) &= \mathrm{Im}(\varphi_j(t)) = -\frac{i}{2}\big(\varphi_j(t) - \varphi_{k+j}(t)\big), \quad j = 1, 2, \dots, k,
\end{aligned}$$

gde su $\varphi_j(t) = v_j e^{\lambda_j t}$, $\varphi_{k+j}(t) = \overline{\varphi_j(t)} = \overline{v_j} e^{\overline{\lambda_j} t}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Tada je fundamentalni sistem rešenja sistema DJ (1)

$$S = \{\psi_1(t), \dots, \psi_k(t), \psi_{k+1}(t) \dots, \psi_{2k}(t)\},$$

Dokaz. Dokažimo najpre linearnu nezavisnost vektora $\{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k\}$. Pretpostavimo suprotno, da postoje konstante c_j, d_j, $j = 1, 2, \dots, k$ koje nisu sve jednake nuli tako da je

$$\sum_{j=1}^{k} (c_j a_j + d_j b_j) = 0.$$

Tada je

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \big(c_j(v_j + \overline{v_j}) - i\, d_j(v_j - \overline{v_j})\big) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k} \big((c_j - i\, d_j)v_j + (c_j + i\, d_j)\overline{v_j}\big) = 0.$$

Kako su sopstveni vektori v_j, $\overline{v_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$ linearno nezavisni, mora biti $c_j \pm i\, d_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, odakle zaključujemo da su $c_j = d_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, što je suprotno pretpostavci.

Dokažimo sada da su $\{\psi_1(t), \dots, \psi_k(t), \psi_{k+1}(t) \dots, \psi_{2k}(t)\}$ linearno nezavisna rešenja sistema DJ (1). Pretpostavimo suprotno, da postoje konstante c_j, d_j, $j = 1, 2, \dots, k$ koje nisu sve jednake nuli, tako da je

$$\sum_{j=1}^{k} \big(c_j \psi_j(t) + d_j \psi_{k+j}(t)\big) = 0.$$

Tada je

$$\sum_{j=1}^{k}\Big(c_j\frac{\varphi_j(t)+\varphi_{k+j}(t)}{2}-i\,d_j\frac{\varphi_j(t)-\varphi_{k+j}(t)}{2}\Big)=0.$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k}(c_j-i\,d_j)\varphi_j(t)+(c_j+id_j)\varphi_{k+j}(t)=0.$$

Kako su prema Teoremi 2 rešenja $\{\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t),\varphi_{k+1}(t)\dots,\varphi_{2k}(t)\}$ linearno nezavisna, biće $c_j\pm i\,d_j=0$, $j=1,2,\dots,k$, odakle zaključujemo da su $c_j=d_j=0$, $j=1,2,\dots,k$, što je suprotno pretpostavci. $\square$

Primer 5.2. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1+y_2\\ y_2' &= -y_1+2y_2 \end{aligned}$$

Rešenje.

$$Y'=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}Y$$

```
In[1]:=A={{2,1},{-1,2}};
Eigensystem[A]
Out[1]={{2+i,2-i},{{-i,1},{i,1}}}
```

Sopstvene vrednosti su $\lambda_{1,2}=2\pm i$, a odgovarajući sopstveni vektori su

$$v_{1,2}=\begin{bmatrix}\mp i\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mp i\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t)=e^{(2+i)t}\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}&=e^{2t}(\cos t+i\sin t)\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}\right)\\
&=e^{2t}(\cos t+i\sin t)(a+ib)=e^{2t}(a\cos t-b\sin t+i(a\sin t+b\cos t))\\
&=e^{2t}\left(\begin{bmatrix}0\\ \cos t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin t\\ 0\end{bmatrix}+i\left(\begin{bmatrix}0\\ \sin t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\cos t\\ 0\end{bmatrix}\right)\right)\\
&=e^{2t}\left(\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Linearno nezavisna rešenja su

$$\varphi_1(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\qquad \varphi_2(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \Phi(t)c = e^{2t} \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{2t}\big(c_1 \sin t - c_2 \cos t\big) \\ y_2(t) &= e^{2t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) \end{aligned}$$

Primer 5.3. Rešiti KP

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - t\cos t, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= 10y_1 - y_2 + t\cos 3t, & y_2(0) &= -1 \end{aligned}$$

Rešenje. `In[1]:=A={{1,-1},{10,-1}};`

`Eigensystem[A]`

`Out[2]=` $\{\{3i, -3i\}, \{\{\frac{1}{10} + \frac{3i}{10}, 1\}, \{\frac{1}{10} - \frac{3i}{10}, 1\}\}\}$

Sopstvene vrednosti su $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, a odgovarajući sopstveni vektori su

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = e^{3i\,t} \begin{bmatrix} 1+3i \\ 10 \end{bmatrix} &= (\cos 3t + i\sin 3t) \begin{bmatrix} 1+3i \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= (\cos 3t + i\sin 3t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= a\cos 3t - b\sin 3t + i(a\sin 3t + b\cos 3t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos 3t - 3\sin 3t \\ 10\cos 3t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin 3t + 3\cos 3t \\ 10\sin 3t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Linearno nezavisna rešenja su

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t - 3\sin 3t \\ 10\cos 3t \end{bmatrix} \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t + 3\cos 3t \\ 10\sin 3t \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t - 3\sin 3t & \sin 3t + 3\cos 3t \\ 10\cos 3t & 10\sin 3t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje homogenog sistema DJ:

$$Y_h(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \Phi(t)c = \begin{bmatrix} \cos 3t - 3\sin 3t & \sin 3t + 3\cos 3t \\ 10\cos 3t & 10\sin 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_h(t) = \begin{bmatrix} c_1\big(\cos 3t - 3\sin 3t\big) + c_2\big(\sin 3t + 3\cos 3t\big) \\ 10c_1\cos 3t + 10c_2\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$Y_h(t) = \begin{bmatrix} \big(c_1 + 3c_2\big)\cos 3t + \big(c_2 - 3c_1\big)\sin 3t \\ 10c_1\cos 3t + 10c_2\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1\big(\cos 3t - 3\sin 3t\big) + c_2\big(\sin 3t + 3\cos 3t\sin t\big) \\ y_2(t) &= 10c_1\cos 3t + 10c_2\sin 3t \end{aligned}$$

Opšte rešenje nehomogenog linearnog sistema DJ $Y' = AY + F(t)$ je:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt, \quad t \in (a,b).$$

Da bi primenili formulu najpre zadajemo fundamentalnu matricu i vektorsku funkciju $F(x)$.

`In[3]:=` $\mathrm{FM}[t\_] = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[3t] - 3\mathrm{Sin}[3t] & \mathrm{Sin}[3t] + 3\mathrm{Cos}[3t] \\ 10\mathrm{Cos}[3t] & 10\mathrm{Sin}[3t] \end{pmatrix};$

$F[t\_] = \begin{pmatrix} -t\mathrm{Cos}[3t] \\ t\mathrm{Sin}[3t] \end{pmatrix};$

Zatim odredjujemo:

(1) inverznu matricu fundamentalne matrice sistema:

fminv[t_] = Inverse[FM[t]]; MatrixForm[fminv[t]]//Simplify

Inverzna matrica fundamentalne matrice sistema je

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sin 3t & \frac{1}{30}(3\cos 3t + \sin 3t) \\ \frac{1}{3}\cos 3t & \frac{1}{30}(-\cos 3t + 3\sin 3t) \end{bmatrix}$$

(2) odredjujemo redom $\Phi^{-1}(t)\,F(t)$, $\Psi(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt$ i $Y_p(t) = \Phi(t)\Psi(t)$:

S1[t_] = fminv[t].F[t]; MatrixForm[S1[t]]//Simplify

$$\Phi^{-1}(t)F(t) = \Phi^{-1}(t)\begin{bmatrix} -t\cos 3t \\ t\cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30}t\sin 3t(13\cos 3t + \sin 3t) \\ -\frac{1}{60}t(7 + 13\cos 6t + \sin 6t) \end{bmatrix}$$

S2[t_] = Integrate[S1[t], t]; MatrixForm[S2[t]]//Simplify

$$\Psi(t)=\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt=\begin{bmatrix} \frac{1}{2160}\left(18t^2-(1+78t)\cos 6t+(13-6t)\sin 6t\right) \\ \frac{1}{2160}\left(-126t^2+(-13+6t)\cos 6t-(1+78t)\sin 6t\right) \end{bmatrix}$$

S3[t_] = FM[t].S2[t]; MatrixForm[S3[t]]//Simplify

$$\Phi(t)\Psi(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{216}\left(-2\left(2+3t+18t^2\right)\cos 3t+\left(1-24t-18t^2\right)\sin 3t\right) \\ \frac{1}{216}\left(\left(-1-78t+18t^2\right)\cos 3t+\left(13-6t-126t^2\right)\sin 3t\right) \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje nehomogenog sistema DJ:

$$Y(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\Psi(t)$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix} \left(c_1+3c_2\right)\cos 3t+\left(c_2-3c_1\right)\sin 3t \\ 10c_1\cos 3t+10c_2\sin 3t \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \frac{1}{216}\left(\left(-4-6t-36t^2\right)\cos 3t+\left(1-24t-18t^2\right)\sin 3t\right) \\ \frac{1}{216}\left(\left(-1-78t+18t^2\right)\cos 3t+\left(13-6t-126t^2\right)\sin 3t\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{216}\Big(\left(-4-6t-36t^2+216C_1+648C_2\right)\cos 3t \\ &\qquad +\left(1-24t-18t^2+216C_2-648C_1\right)\sin 3t\Big) \\ y_2(t) &= \frac{1}{216}\Big(\left(-1-78t+18t^2+2160C_2\right)\cos 3t \\ &\qquad +\left(13-6t-126t^2+2160C_2\right)\sin 3t\Big) \end{aligned}$$

Košijevo rešenje KP $Y'=AY+F(t)$, $Y(t_0)=Y_0$ je

$$Y_p(t)=\Phi(t)\left(\Phi^{-1}(t_0)\,Y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,F(s)\,ds\right),\quad t\ge t_0.$$

Da bi primenili formulu najpre zadajemo početnu vrednost t_0 i početni vektor Y_0:

```
t0=0; Y0={{1},{-1}};
```

a zatim odredjujemo:

(1) $C_0=\Phi^{-1}(t_0)Y_0$ i rešenje početnog problema homogenog linearnog sistema $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)Y_0$:

C0=fminv[t0].Y0; MatrixForm[pvo]

$$\Phi^{-1}(t_0)Y_0=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{11}{30} \end{bmatrix}$$

pph[t_]=FM[t].C0; MatrixForm[psi[t]]//Simplify

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(0)Y_0 = \begin{bmatrix} \cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t \\ -\cos 3t + \frac{11}{3}\sin 3t \end{bmatrix}$$

(2) $\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds.$

$\mathrm{int}[t\_] = \mathrm{FM}[t].\int_{\mathrm{t0}}^t \mathrm{fminv}[s].F[s]\,ds;$ MatrixForm[int[t]]//Simplify

$$\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{108}\left(-3(t+6t^2)\cos 3t + \left(1-12t-9t^2\right)\sin 3t\right) \\ \frac{1}{108}\left(3(-13t+3t^2)\cos 3t + \left(13-3t-63t^2\right)\sin 3t\right) \end{bmatrix}$$

Konačno, traženo Košijevo rešenje je

$\mathrm{kosres}[t\_] = \mathrm{pph}[t] + \mathrm{int}[t];$ MatrixForm[kosres[t]]//Simplify

$$Y_p(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{108}\left((108-3t-18t^2)\cos 3t + \left(73-12t-9t^2\right)\sin 3t\right) \\ \frac{1}{108}\left((-108-39t+9t^2)\cos 3t + \left(409-3t-63t^2\right)\sin 3t\right) \end{bmatrix}$$

Primer 5.4. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{y_1}{2} - y_2 + 64y_3 \\ y_2' &= -\frac{y_2}{4} - 16y_3 \\ y_3' &= y_2 - \frac{y_3}{4} \end{aligned}$$

Rešenje.

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 64 \\ 0 & -1/4 & -16 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

`In[1]:=` $A = \{\{-1/2,-1,64\},\{0,-1/4,-16\},\{0,1,-1/4\}\}$

`Eigensystem[A]`

`Out[2]=` $\left\{\left\{-\frac{1}{4}+4i, -\frac{1}{4}-4i, -\frac{1}{2}\right\}, \{\{-16i,4i,1\},\{16i,-4i,1\},\{1,0,0\}\}\right\}$

Sopstvena vrednost $\lambda_1 = -1/2$, a odgovarajući sopstveni vektor je

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t/2}$$

Sopstvena vrednost $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4} + 4i$, a odgovarajući sopstveni vektor je

$$v_2 = \begin{bmatrix} -16i \\ 4i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{2,3}(t) = e^{-t/4} \left(\cos 4t + i \sin 4t \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = Y_2(t) + iY_3(t)$$

Dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuća paru konjugovano-kompleksnih sopstevnih vrednosti $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{4} \pm 4i$ u

$$Y_2(t) = e^{-t/4} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 4t - \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 4t \right) = e^{-t/4} \begin{bmatrix} 16 \sin 4t \\ -4 \sin 4t \\ \cos 4t \end{bmatrix}$$

$$Y_3(t) = e^{-t/4} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 4t + \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 4t \right) = e^{-t/4} \begin{bmatrix} -16 \cos 4t \\ 4 \cos 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & 16e^{-t/4} \sin 4t & -16e^{-t/4} \cos 4t \\ 0 & -4e^{-t/4} \sin 4t & 4e^{-t/4} \cos 4t \\ 0 & e^{-t/4} \cos 4t & e^{-t/4} \sin 4t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je:

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + c_3 Y_3(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t/2} + 16e^{-t/4}(-c_3 \cos 4t + c_2 \sin 4t) \\ 4e^{-t/4}(c_3 \cos 4t - c_2 \sin 4t) \\ e^{-t/4}(c_2 \cos 4t + c_3 \sin 4t) \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ Višestruke sopstvene vrednosti matrice A:

Neka je λ sopstvena vrednost matrica A višestrukosti $2 \le k \le n$. Tada se može pokazati da su funkcije

$$\varphi_i(t) = \omega_i t^{i-1} e^{\lambda t}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

linearno nezavisna rešenja sistema DJ (1), za odgovarajući izbor vektora ω_i (dokaz je analogan dokazu u slučaju višestrukog korena karakteristične jednačine linearne DJ $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima).

Nalaženje k linearno nezavisnih rešenja sistema (1) zasniva se na određivanju rešenja $Y(t) = P(t)e^{\lambda t}$, gde je $P(t)$ polinomska vektorska funkcija stepena $st(P) \leq k-1$.

Za linearnu transformaciju $T : V \to W$ vektorskih prostora V, W, podprostor vektorskog prostora V

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \,:\, Tv = 0\},$$

je *jezgro* od T, a podprostor vektorskog prostora W

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \,:\, \exists\, v \in V, Tv = w\} = T(V)$$

je *slika* od T. Važi

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

Ako je A kvadratna matrica reda $n \times n$, za linearnu transformaciju $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax$ važi

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = n\,.$$

Označimo sa

$$\mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I}) = \operatorname{Ker}(A - \lambda\mathbb{I}) = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, (A - \lambda\mathbb{I})v = 0\},$$

$$\mathcal{R}(A - \lambda\mathbb{I}) = \operatorname{Im}(A - \lambda\mathbb{I}) = \{u \in \mathbb{R}^n \,:\, u = (A - \lambda\mathbb{I})v, \quad v \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Neka matrica A ima sopstvenu vrednost višestrukosti 2: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

I SLUČAJ: Neka je $\dim \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I}) = 1$ i neka je $V_1 \in \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I})$ odgovarajući sopstveni vektor. Jedno rešenje sistema DJ (1) je

$$Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$$

Tražimo drugo linearno nezavisno rešenje u obliku

$$Y_2(t) = (v_2 t + w_2)e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_1(v_2 t + w_2)e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_1 t} = Y_2'(t) = AY_2(t) = A(v_2 t + w_2)e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_1 v_2 t + (\lambda_1 w_2 + v_2) = Av_2 t + Aw_2$$

$$\lambda_1 v_2 = Av_2 \qquad\qquad \lambda_1 w_2 + v_2 = Aw_2 \tag{4}$$

$$\downarrow$$

$$v_2 \in \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I})$$

Kako je $\dim \mathcal{K}(A-\lambda\mathbb{I}) = 1$, biće $v_2 = \mu V_1$, $\mu \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad v_2 = V_1$

$$\lambda_1 w_2 + v_2 = A w_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = A w_2 - \lambda_1 w_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = (A - \lambda_1 I) w_2$$

Drugo linearno nezavisno rešenje odgovarajuće sopstvenoj vrednosti λ_1 je

$$Y_2(t) = (V_1 t + w_2) e^{\lambda_1 t}$$

gde w_2 zadovoljava $(A - \lambda_1 I) w_2 = V_1$.

II SLUČAJ: Neka je $\dim \mathcal{K}(A-\lambda\mathbb{I}) = 2$ i neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{K}(A-\lambda\mathbb{I})$ linearno nezavisni sopstveni vektori matrice A. Tada su

$$Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad Y_2(t) = V_2 e^{\lambda_1 t}$$

linearno nezavisna rešenja sistema DJ (1).

Primer 5.5. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= -8y_1 - y_2 \\ y_2' &= 16y_1 \end{aligned}$$

REŠENJE.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

`In[1]:=` $A = \{\{-8, -1\}, \{16, 0\}\}$

`Eigensystem[A]`

`Out[2]=` $\{\{-4, -4\}, \{\{-1, 4\}, \{0, 0\}\}\}$

Matrica A ima dvostruku sopstvenu vrednost $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ i samo jedan sopstveni vektor $v_1 = (-1, 4)^T$.

$$Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Tražimo drugo linearno nezavisno rešenje u obliku

$$Y_2(t) = (v_1 t + w_2) e^{\lambda_1 t}$$

gde $w_2 = (\mu_1, \mu_2)^T$ zadovoljava

$$(A + 4I) w_2 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
In[3]:=LinearSolve[A + 4IdentityMatrix[2], {-1, 4}]
Out[4]= {1/4, 0}
```

$$\mu_1 = \frac{1}{4},\ \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_2(t) = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-4t} = e^{-4t} \begin{bmatrix} -t + 1/4 \\ 4t \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 & -t + 1/4 \\ 4 & 4t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je:

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = \Phi(t) c = e^{-4t} \begin{bmatrix} -c_1 + (-t + 1/4) c_2 \\ 4c_1 + 4tc_2 \end{bmatrix}$$

Primer 5.6. Rešiti sistem jednačina

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} Y\,.$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, odgovarajući sopstveni vektor su $v_1 = (0, 0, 1)^T$, $v_2 = (0, 1, 0)^T$. Dva linearno nezavisna rešenja su

$$Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}, \qquad Y_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Tražimo treće linearno nezavisno rešenje u obliku

$$Y_3(t) = (v_2 t + w_2) e^{\lambda_2 t}$$

gde $w_2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ zadovoljava

$$(A - 2I) w_2 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
In[3]:= LinearSolve[A - 2 IdentityMatrix[3], {0, 1, 0}]
Out[4]:= {1, 0, -1}
```

$$Y_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^{2t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ e^{3t} & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je:

$$Y(t) = \Phi(t)c = \begin{bmatrix} c_3 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \\ c_1 e^{3t} - c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Primer 5.7. Rešiti sistem jednačina

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y \, .$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, odgovarajući sopstveni vektor su $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (-1, 0, 1)^T$, $v_3 = (-1, 1, 0)^T$. Linearno nezavisna rešenja su

$$Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t},$$

$$Y_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad Y_3(t) = v_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Fundamentalna matrica sistema i opšte rešenje su:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3) e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

Neka matrica A ima sopstvenu vrednost višestrukosti 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

I SLUČAJ: Neka je $\dim \mathcal{K}(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = 1$ i neka je $V_1 \in \mathcal{K}(A - \lambda_1 \mathbb{I})$ odgovarajući sopstveni vektor matrice A. Jedno rešenje sistema DJ (1) je

$$Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$$

Tražimo druga dva linearno nezavisna rešenja u obliku

$$Y_2(t) = (v_2 t + w_2) e^{\lambda_1 t} \qquad Y_3(t) = \left(\frac{1}{2} v_3 t^2 + w_3 t + u_3 \right) e^{\lambda_1 t}$$

Zamenom u jednačinu (1) dobija se:

$$A(v_2 t + w_2) e^{\lambda_1 t} = A Y_2(t) = Y_2'(t) = v_2 e^{\lambda_1 t} + (v_2 t + w_2) \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$A v_2 t + A w_2 = \lambda_1 v_2 t + v_2 + w_2 \lambda_1$$

$$A Y_3(t) = Y_3'(t)$$

$$\Downarrow$$

$$A \left(\frac{1}{2} v_3 t^2 + w_3 t + u_3 \right) e^{\lambda_1 t} = (v_3 t + w_3) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \left(\frac{1}{2} v_3 t^2 + w_3 t + u_3 \right) e^{\lambda_1 t}$$

$$A v_3 t^2/2 + A w_3 t + A u_3 = \lambda_1 v_3 t^2/2 + (v_3 + w_3 \lambda_1) t + w_3 + u_3 \lambda_1$$

odakle se dobijaju sistemi jednačina po nepoznatim vektorima v_2, w_2, v_3, w_3 i u_3:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_2 &= A v_2 \\
(A - \lambda_1 I) w_2 &= v_2 \\
\lambda_1 v_3 &= A v_3 \\
(A - \lambda_1 I) w_3 &= v_3 \\
(A - \lambda_1 I) u_3 &= w_3
\end{aligned}$$

Dakle, $v_2, v_3 \in \mathcal{K}(A - \lambda_1 \mathbb{I})$, tako da je $v_2 = \mu_2 V_1$, $v_3 = \mu_3 V_1$, $\mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$. Možemo uzeti $v_2 = v_3 = V_1$. Vektori w_2, w_3 su rešenje sistema $(A - \lambda_1 I) w = V_1$. Kako je $\dim \mathcal{R}(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = 2$, tj. $\operatorname{rang}(A - \lambda_1 \mathbb{I}) = 2$, sistem $(A - \lambda_1 I) w = V_1$ ima beskonačno mnogo rešenja. Konačno, vektor u_3 je rešenje sistema $(A - \lambda_1 I) u_3 = w_3$.

II SLUČAJ: Neka je $\dim \mathcal{K}(A - \lambda \mathbb{I}) = 2$ i neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{K}(A - \lambda \mathbb{I})$ odgovarajući sopstveni vektor matrice A. Dva linearno nezavisna rešenje sistema DJ (1) su

$$Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad Y_2(t) = V_2 e^{\lambda_1 t},$$

dok treće linearno nezavisno rešenje tražimo u obliku

$$Y_3(t) = (v_3 t + w_3)e^{\lambda_1 t}.$$

Zamenom u jednačinu (1) dobija se

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_3 &= A v_3 \\ (A - \lambda_1 I) w_3 &= v_3 \end{aligned}$$

Dakle, $v_3 \in \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I})$, tako da je $v_3 = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Vektor w_3 je rešenje sistema $(A - \lambda_1 I)w = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$, pri čemu $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ biramo tako da sistem ima rešenje, uzevši u obzir da je sada $\text{rang}(A - \lambda\mathbb{I}) = 1$.

III slučaj: Neka je $\dim \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I}) = 3$ i neka su $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{K}(A - \lambda\mathbb{I})$ linearno nezavisni sopstveni vektori matrice A. Tada su

$$Y_k(t) = V_k e^{\lambda_1 t}, \qquad k = 1, 2, 3$$

linearno nezavisna rešenja sistema DJ (1) koja čine njegov fundamentalni sistem.

Primer 5.8. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' &= -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

Rešenje.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
In[1]:= A = {{1, 1, 1}, {2, 1, -1}, {-3, 2, 4}}
Eigensystem[A]
Out[2]= {{2, 2, 2} , {{0, -1, 1} , {0, 0, 0} , {0, 0, 0}}}
```

$$Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Drugo linearno nezavisno rešenje je oblika

$$Y_2(t) = (v_1 t + w_2)e^{2t}$$

gde w_2 zadovoljava $(A-2I)w_2 = v_1$. Linearan sistem $(A-2I)w = v_1$ je oblika

$$-w_1 + w_2 + w_3 = 0, \quad 2w_1 - w_2 - w_3 = -1, \quad -3w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 1$$

i ima beskonačno mnogo rešenja $\{(-1, y, -1-y) \,:\, y \in \mathbb{R}\}$.

```
In[3]:= B=A-2 IdentityMatrix[3]; LinearSolve[B, {0, -1, 1}]
Out[4]:= {-1, -1, 0}
```

```
In[5]:=Solve[B.{x1,x2,x3}=={0,-1,1},{x1,x2,x3}]
Out[6]:= {{x1 → −1, x3 → −x2 − 1}}
```

$$w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

$$Y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -t-1 \\ t \end{bmatrix} e^{2t}$$

Treće linearno nezavisno rešenje je oblika

$$Y_3(t) = \left(\frac{1}{2}\, v_1 t^2 + w_2 t + u_3 \right) e^{2t}$$

gde u_3 zadovoljava $(A-2I)u_3 = w_2$

```
In[5]:= LinearSolve[A - 2 IdentityMatrix[3], {-1, -1, 0}]
Out[6]:= {-2, -3, 0}
```

$$u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y_3(t) = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

$$Y_3(t) = \begin{bmatrix} -t-2 \\ -\frac{1}{2}t^2 - t - 3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -t-2 \\ -1 & -t-1 & -\frac{1}{2}t^2 - t - 3 \\ 1 & t & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} e^{2t}$$

Opšte rešenje je:

$$Y(t) = \Phi(t)c = \begin{bmatrix} -c_2 + c_3(-t-2) \\ -c_1 + c_2(-t-1) + c_3\left(-\dfrac{t^2}{2} - t - 3\right) \\ c_1 + c_2 t + \dfrac{c_3}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Primer 5.9. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3 \end{aligned}$$

Rešenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In[1]:= $A = \{\{2,-1,-1\},\{2,-1,-2\},\{-1,1,1\}\}$

Eigensystem[A]

Out[2]= $\{\{1,1,1\},\{\{1,0,1\},\{1,1,0\},\{0,0,0\}\}\}$

Dakle, sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ i imamo dva linearno nezavisna sopstvena vektora $v_1 = (1,0,1)^T$ i $v_2 = (1,1,0)^T$. Dva linearno nezavisna rešenja su

$$Y_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \qquad Y_2(t) = v_2 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

Treće linearno nezavisno rešenje tražimo u obliku

$$Y_3(t) = (v_3 t + w_3)e^t$$

gde je $v_3 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, a w_3 je rešenje sistema $(A - I)w = v_3$, odnosno

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$$

Sistem ima rešenja ako je $2\mu_1 + 2\mu_2 = \mu_2$ i $\mu_1 + \mu_2 = -\mu_1$, odnosno $2\mu_1 + \mu_2 = 0$. Dakle, možemo uzeti da je $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = -2$, tako da je $v_3 = (-1,-2,1)^T$.

```
In[3]:= LinearSolve[A - IdentityMatrix[3], {-1, -2, 1}]
Out[4]:= {-1, 0, 0}
```

$$w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y_3(t) = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t$$

$$Y_3(t) = \begin{bmatrix} -t-1 \\ -2t \\ t \end{bmatrix} e^t$$

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -t-1 \\ 0 & 1 & -2t \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} e^{2t}$$

Opšte rešenje je:

$$Y(t) = \Phi(t)c = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3(-t-1) \\ c_2 - 2c_3 t \\ c_1 + c_3 t \end{bmatrix} e^{2t}$$